ESCC
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE
AVENUE THIERS
200 COMPIEGNE
L 44.40 29 32
X 44 40.11 88
ISSEMENT
NSEIGNEMENT
PERIEUR PRIVE
CIATION LOI 1901

MATHEMATIQUES

Vendredi 31 mai 1991 de 8 H 00 à 12 H 00

Options :	Coefficients :
Economique	5
Technologique	5

Afin de donner aux candidats toute la sérénité souhaitable, quant au bon déroulement des épreuves, le directeur du département de mathématiques de l'ESCC rappelle que les restrictions du programme ne concernent que les concepteurs des sujets.

EXERCICE N°1

La fonction numérique f de la variable réelle t est définie par son équation : $f(t) = \frac{1}{t^2+2t+2}$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

PARTIE 1

1. Quel est le domaine de f ?
2. Calculer: $f(-2-t) - f(t)$.
   Conclusion pour $\mathcal{C}$.
3. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$: $\int_{-2-x}^{x} f(t)dt = 2.\int_{-1}^{x} f(t)dt$
4. Calculer les dérivées première et seconde de f, notées f' et f".
5. Calculer : $(t^2+2t+2)f''(t) + 4(t+1)f'(t) + 2f(t)$

A SUIVRE

PARTIE 2

1. Donner les trois premiers termes du développement limité de f, pour t voisin de 0.
2. Soit M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse t=0. Donner l'équation de la tangente en M à $\mathcal{C}$ et la position de $\mathcal{C}$ par rapport à celle-ci.
3. Etudier les variations de f et représenter graphiquement $\mathcal{C}$.
4. Soit φ la restriction de f à $D = [-1, +\infty[$
   Quel est l'espace-image $\varphi(D)$ correspondant ?
5. Montrer que l'application φ de D dans $\varphi(D)$ est une bijection.
6. Donner l'expression de la fonction réciproque φ^{-1}.

PARTIE 3

1. Calculer la limite de $\dfrac{t^{3/2}}{t^2+2t+2}$ quand t tend vers $+\infty$.

2. En déduire qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour $t > A$:

$$\frac{1}{t^2+2t+2} < \frac{1}{t^{3/2}}$$

3. On note : $F(x) = \int_A^x f(t)dt$.

   Démontrer que, pour $x \geqslant A$, $F(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{A}}$

4. Montrer que F est une fonction croissante de x.
5. En déduire que F(x) admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

PARTIE 4

$$I = \int_{-1}^{+\infty} f(t)dt \qquad \text{et} \qquad J = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$$

1. Démontrer que les intégrales I et J sont convergentes.
2. Calculer I et J

   On rappelle que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$

TOURNEZ la page S.V.P.

EXERCICE N°2

ARTIE 1 Pour n entier naturel

. Développer $f(x) = (x+1)^n$ en utilisant la formule du binôme de Newton.

. En déduire l'expression de : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$

. Utiliser la dérivée première f' de f pour calculer : $\sum_{k=0}^{n} k.\, C_n^k$.

. Utiliser la dérivée seconde f" de f pour calculer : $\sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k$.

. Déduire des troisième et quatrième questions la somme : $\sum_{k=0}^{n} k^2 . C_n^k$.

Rappel : $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

PARTIE 2

Pour n et k entiers naturels, les coefficients $u_{n,k}$ sont définis par

$u_{n,0} = \frac{1}{2^n}$ $\qquad u_{n,k} = \frac{n}{2k} \cdot u_{n-1,k-1}$ $\qquad$ pour $0 < k \leqslant n$

et $\qquad u_{n,k} = 0$ $\qquad$ pour $k > n$

. Calculer les coefficients $u_{n,k}$ pour n = 0, 1, 2 et 3.
Les présenter dans un tableau.

. Exprimer $u_{n,k}$ en fonction de n, k et $u_{n-k,0}$.

. En déduire l'expression de $u_{n,k}$.

PARTIE 3

Pour x réel et n entier naturel, la suite des polynômes P est définie par : $P_0(x) = 1$ $\qquad P_n(0) = \frac{1}{2^n}$ $\qquad$ et $\qquad P'_{n+1}(x) = \frac{n+1}{2} \cdot P_n(x)$

où $P'_{n+1}(x)$ est le polynôme dérivé de $P_{n+1}(x)$.

. Déterminer $P_1(x)$, $P_2(x)$ et $P_3(x)$.

. Démontrer que $P_n(x)$ est défini, unique et de degré n.

. En écrivant : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \cdot x^k$ Exprimer les coefficients de $P_{n+1}(x)$ en fonction des coefficients de $P_n(x)$.

. Expliciter $P_n(x)$.

A SUIVRE

PARTIE 4

Etude d'une loi de probabilité pour n entier naturel.

On donne $X(\Omega) = \{0,1,.....,n\}$,

et pour $k \in X(\Omega)$: $P(X=k) = \dfrac{C_n^k}{2^n}$

1. Montrer que (X,P(X)) est une loi de probabilité.
2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
3. La fonction génératrice de X, notée G_X est définie par :

$$x \in \mathbb{R} \qquad G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \cdot P(X=k)$$

Donner l'expression de $G_X(x)$.

PARTIE 5

Des Primes

La société ABC emploie 10 agents dont 4 cadres. Elle se propose de distribuer, d'une manière aléatoire, une prime à un nombre quelconque de ses agents (de 0 à 10 primes).

1. Déterminer le référentiel Ω correspondant à cette distribution et son cardinal.
2. Quelle est la probabilité que cette prime soit distribuée à n agents ? (n variant de 0 à 10).
3. X est le nombre de cadre(s) ayant reçu la prime. (X varie de 0 à 4) Déterminer la loi de probabilité (X,P(X)).
4. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

FIN